“变中有不变”视角下的 高等代数教学

顾 沛

南 开 大 学

08 年10 月　福 建

一、从陈省身先生的一句话谈起

二、高等代数教学中的“变中有不变”

三、等价关系下的不变量及全系不变量

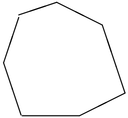
四、概念或命题的“等价叙述”

一、从陈省身先生的一句话谈起

1978年,北大演讲.

“三角形三内角之和等于180°,这个命题不好.”

n边形n内角和$=180^\circ \times (n-2)$



n边形n外角之和$= 360^\circ$ [圆周率π;勾股定理]

曲边形

高斯-博内公式

$$\int K d\sigma = 2\pi \ \chi(M)$$

M: 曲面; K: 高斯曲率; $\chi(M)$: M的欧拉示性数.

二、高等代数教学中的“变中有不变”

〖两多项式的最大公因式在域扩大时不变,但一个多项式是否是不可约多项式,在域扩大时可能会改变〗

1. 向量组的秩(解题时把向量组转换为其极大线性无关组)
2. 矩阵的秩
    1) 最高阶非零子行列的阶数
    2) 行秩=列秩
    3) 相抵关系下标准形中1的个数
    4) 经初等变换化阶梯形后阶梯的个数
3. 线性空间的维数

4. 线性方程组在同解变形下“最简方程组”中方程的个数
5. 实二次型在非退化线性替换下的正惯性指数及符号差
6. 线性空间分解为循环子空间的直和时,各循环子空间的维数及特征根(初等因子)
7. 齐次线性方程组基础解系中解的个数(“解空间”的维数)

三、等价关系下的不变量及全系不变量

1. “相等”观念的形成,是人类认识世界的重大进步.
(它是“抽象”的前提:有些(表面上)看来不同的事物,其实是相同的.)

   1. 5个桔子;5个苹果;5个桃=5个水果
   2. 5个水果;5条鱼;5块石头=5个物体
   3. 2个桔子+3个苹果=5个水果
   4. 2个桔子+1条鱼+2只狗=5个物体=1个苹果+4块石头

   ⋮

2. 从"相等关系"发展到"等价关系",是人类理性思维的重大进步

1) 对自反性、对称性、传递性的归纳、提炼,反映和抽象出"相等关系"的本质,形成了"等价关系"

2) 高等代数教学中的等价关系

   1. 矩阵的相抵关系及λ-矩阵的相抵关系
   2. 对称方阵的相合关系
   3. 方阵的相似关系
   4. 其它(不强调)

      a) 向量组的等价

      b) 线性方程组的等价

      c) 二次型经非退化线性替换互化

3) 等价关系下的不变量及全系不变量

1. 矩阵的相抵关系: 秩

   λ-矩阵的相抵关系: 秩;初等因子组;不变因子组;行列式因子组($\lambda E - A$满秩!)

2. 实对称方阵的实相合关系: 正惯性指数;负惯性指数;符号差;秩

   (全系:四中取二)

   复对称方阵的复相合关系: 秩

3. 域上方阵的相似关系: 初等因子组;不变因子组;行列式因子组;

   (复数域) (全系:前三中取一)

   秩;特征根;迹;行列式;特征多项式

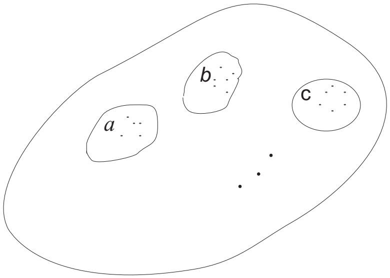
4. 实二次型经非退化线性替换互化: 正惯性指数;负惯性指数;符号差;秩

   (全系:四中取二)

   复二次型经非退化线性替换互化: 秩

4) 等价关系与等价类、标准形、商集合

1. 概念：首先在给定集合中定义“关系”;
   然后验证它是“等价关系”;
   等价类;
   标准形;(同一线性变换在不同基下的矩阵;挑“代表元”)
   商集合.



2. 标准形是人为的.
   标准形的一般标准: 简单;显著反映全系不变量;尽可能唯一.

3. 高等代数教学中的标准形

i) 矩阵的相抵关系($m \times n$矩阵): $\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{\text{r个}} & \\ & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$,r=秩

λ-矩阵的相抵关系($m \times n$矩阵): $\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

这里$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$,不变因子组,秩$= r$.

ii) 实对称方阵的实相合关系(n阶方阵):

$$\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1 \ \ddots \ 1}}^{\text{p个}} \overbrace{\hphantom{-1 \ \ddots \ -1}}^{\text{q个}} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{c} p = \text{正惯性指数}, \\ q = \text{负惯性指数} \end{array}$$

复对称方阵的复相合关系(n阶方阵):

$$\left(\begin{array}{cccccc} \overbrace{1 \quad \ddots \quad 1}^{\text{r个}} & & & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right), \qquad \text{r=秩}$$

iii) 域上方阵的相似关系(n阶方阵):

若当标准形 $$\begin{pmatrix} \square & & & & \\ & \square & & & \\ & & \square & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \square \end{pmatrix}^{(n\times n)}$$

若当块 $$\boxed{\begin{matrix}\lambda_0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_0\end{matrix}}$$, 初等因子

有理标准形 $\begin{pmatrix} \Box & & & & \\ & \Box & & & \\ & & \Box & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \Box \end{pmatrix}^{(n\times n)}$

伴侣块 $\boxed{\begin{matrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{matrix}}$,不变因子$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots$

iv) 实二次型经非退化线性替换互化(n元):

$z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$, 这里$p=$正惯性指数,$r=$秩,$r=p+q$

[规范形!(标准形不唯一)]

复二次型经非退化线性替换互化(n元):$z_1^2+\cdots+z_r^2$,$r=$秩

4. 标准形的应用

——当命题的条件和结论在某种等价关系下都不改变时,证明命题时可以“不妨假设$**$是标准形”

例1. 证明λ-矩阵的不变因子与行列式因子的关系.

例2. 证明:

n阶方阵A的任一特征根都有秩$(\lambda_i E - A)$ =秩$(\lambda_i E - A)^2$ $\Longleftrightarrow$ A相似于对角形方阵.

例3. 设n阶方阵A的特征值均为1,对任意自然数k,都有A^k与A相似.

3. 同构关系

同构关系是一种重要的等价关系(满足自反性、对称性、传递性).

1) 线性空间的同构

1. 同一数域$\mathbb{P}$上的线性空间$\mathscr{L}_1$与$\mathscr{L}_2$才能谈是否同构
2. 线性空间的同构与同构映射

$$\left(\begin{array}{l} \text{同构} \Longleftrightarrow \text{存在同构映射} \\ \text{同构映射}\left\{\begin{array}{l} \text{双射}\left\{\begin{array}{l}\text{单射}\\ \text{满射}\end{array}\right. \\ \text{保线性}\left\{\begin{array}{l}\text{保加法}\\ \text{保乘法——数乘}\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right)$$

3. $\mathbb{P}$上线性空间$\mathscr{L}_1$与$\mathscr{L}_2$同构的充要条件是它们有相同的维数
4. $\mathbb{P}$上任意n维线性空间都同构于n维数组向量空间$\mathbb{P}^{(n)}$

2) 欧氏空间的同构

1. 欧氏空间都是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间
   作为欧氏空间同构$\Rightarrow$作为线性空间同构(反之不对)
2. 欧氏空间的同构与同构映射 $\left(\begin{array}{l} \text{同构} \Longleftrightarrow \text{存在同构映射} \\ \text{同构映射} \begin{cases} \text{双射} \\ \text{保线性} \\ \text{保内积} \end{cases} \end{array}\right)$
3. 欧氏空间$\mathscr{L}_1$与$\mathscr{L}_2$同构的充要条件是它们有相同的维数
4. 任意n维欧氏空间都同构于n维数组欧氏空间$\mathbb{R}^{(n)}$

3) 线性变换环与矩阵环的同构

线性变换环: 数域$\mathbb{P}$上n维线性空间上全体线性变换关于线性变换的加法和乘法所成的环

矩阵环: 数域$\mathbb{P}$上全体n阶方阵关于矩阵的加法和乘法所成的环

1. 同一$\mathbb{P}$、同一n的线性空间上的线性变换环才能谈是否同构
2. 同构与同构映射: 同构$\Longleftrightarrow$存在同构映射(取定一组基)

$$\text{同构映射}\begin{cases}\text{双射}\begin{cases}\text{单射}\\\text{满射}\end{cases}\\\text{保运算}\begin{cases}\text{加法}\\\text{乘法}\end{cases}\end{cases}$$

3. 线性变换: 几何;直观、形象;便于想像、推理;本质
4. 矩阵: 代数;具体、实在;便于计算、推导;表象
5. 矩阵环可看作是线性变换环的“表示”

四、概念或命题的“等价叙述”

“等价叙述”即“充分必要条件”,即本质上是一回事,从表象上的不同侧面阐述同一件事,是又一种“变中有不变”.

1. “行列式”的四种等价定义

   1. 不同行不同列元素乘积的代数和;
   2. 归纳定义: 先定义1阶、2阶的行列式,再假设$n-1$阶的已有定义,去定义n阶行列式;
   3. 公理化定义: (行列式是)一个表,定义为一个数,满足六条公理(现教材中行列式的性质),则称该表为行列式;
   4. 用反对称张量来定义行列式.

2. “矩阵相抵”的两种说法

   1. 左乘、右乘可逆方阵可以互变;
   2. 经过初等行变换、列变换可以互化.

3. “两个子空间构成直和”的五种等价说法(记W_1, W_2是L的子空间)

1. W_1+W_2中任一向量的分解, 表法唯一;
2. W_1+W_2中零向量的分解, 表法唯一;
3. $W_1 \bigcap W_2=\{0\}$;
4. $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$;
5. (W_1+W_2)的基$=W_1$的基$\bigcup W_2$的基.

4. “正定二次型”的十二种等价说法(记$f = X'AX$)

1. $\forall X \neq O, X'AX > 0$;
2. A为n阶正定方阵;
3. $X'AX$的正惯性指数$= n$, 或　A的正惯性指数$= n$;
4. 有实可逆方阵C, 使$A = C'C$;
5. A实相合于$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$, d_i均> 0　或A实相合于E;
6. A的主子式均> 0;
7. A的顺序主子式均> 0;
8. A^{-1}是正定方阵;
9. $A^{\star}$（伴随矩阵）是正定方阵;
10. $k > 0, kA$是正定方阵;
11. $X'AX$的标准形为$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$, d_i均> 0;
12. $X'AX$的规范形为$z_1^2 + z_n^2 + \cdots + z_n^2$.

5. “可逆线性变换”的十二种等价说法

“n维线性空间$L_n(\mathbb{P})$的线性变换$\mathscr{A}$是可逆线性变换”

1. 有$L_n(\mathbb{P})$的线性变换$\mathscr{B}$, 使$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}=id$（恒等变换）;
2. $\mathscr{A}$在$L_n(\mathbb{P})$的任一组基下的矩阵是可逆矩阵;
3. 对$L_n(\mathbb{P})$的任一组基$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$, 基象组$\{\mathscr{A}(\alpha_1),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_n)\}$仍为$L_n(\mathbb{P})$的一组基;
4. $\mathscr{A}$的秩为n, 或$\dim\mathscr{A}(\mathscr{L})=n$;
5. $\mathscr{A}$的零度为0, 或$\dim\mathscr{A}^{-1}(\{0\})=0$;
6. $\mathscr{A}$的值域为整个空间, 或$\mathscr{A}(\mathscr{L})=L_n(\mathbb{P})$;
7. $\mathscr{A}$的核为零空间, 或$\mathscr{A}^{-1}(\{0\})=\{0\}$;
8. $\mathscr{A}$是满射;

   （原因：$\dim\mathscr{A}(\mathscr{L})+\dim\mathscr{A}^{-1}(\{0\})=n$）
9. $\mathscr{A}$是单射;
10. 存在一个常数项不为零的多项式$f(x)$, 使$f(\mathscr{A})=0$;
11. $\mathscr{A}$的特征根全不为零;
12. 若$\mathscr{L}=\mathscr{L}_1\bigoplus\mathscr{L}_2$, 则$\mathscr{L}=\mathscr{A}(\mathscr{L}_1)\bigoplus\mathscr{A}(\mathscr{L}_2)$.

6. "线性变换可对角化"（方阵A相似于对角阵）的十种等价说法

$\mathscr{A}$是$L_n(\mathbb{P})$的线性变换, $\mathscr{A}$在$L_n(\mathbb{P})$的一组基下的矩阵为A.

1. 存在$L_n(\mathbb{P})$的一组基$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 使$\mathscr{A}$在这组基下的矩阵为对角形方阵;
2. 存在数域$\mathbb{P}$上的n阶可逆方阵P, 使PAP^{-1}为对角形方阵;
3. $L_n(\mathbb{P})$中有一组由$\mathscr{A}$的特征向量构成的基, 或$\mathscr{A}$有n个线性无关的特征向量;
4. $\mathscr{L}=V_1\bigoplus V_2\bigoplus\cdots\bigoplus V_n$, 其中$V_i$均是$\mathscr{A}$的一维不变子空间;
5. $\mathscr{L}$的所有特征子空间的维数之和等于n;
6. $\mathscr{A}$的每一特征根都是特征值, 且每一特征值的几何重数与其代数重数相等;
7. $\mathscr{A}$的最小多项式是$\mathbb{P}$上互素的一次因式的乘积;
8. $\mathscr{A}$的最小多项式无重根;
9. 复数域上线性空间$L_n(\mathbb{C})$的线性变换$\mathscr{A}$的初等因子全是一次的, 或若当块全是1阶的;
10. 复数域上线性空间$L_n(\mathbb{C})$的线性变换$\mathscr{A}$的不变因子均无重根.

7. “正交变换”的五种等价说法

记$\mathscr{A}$是n维欧氏空间V的线性变换

1. $\mathscr{A}$是正交变换;
2. $(\mathscr{A}(\alpha), \mathscr{A}(\beta)) = (\alpha, \beta), \forall \alpha, \beta \in V$;
3. $|\mathscr{A}(\alpha)| = |\alpha|, \forall \alpha \in V$;
4. 对V中任意标准正交基$\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\} \Longrightarrow \{\mathscr{A}(\varepsilon_1), \cdots, \mathscr{A}(\varepsilon_n)\}$ 也是标准正交基;
5. $\mathscr{A}$在任意标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

8. “有关线性变换的命题”与“有关方阵的命题”互相转换

1) 线性变换$\mathscr{A}$的零化多项式都是最小多项式的倍式

方阵A的零化多项式都是最小多项式的倍式;

2) 复线性空间上的线性变换$\mathscr{A}$, 一定在适当基下的矩阵为若当标准形

复矩阵A, 一定相似于某若当形矩阵;

3) 幂零线性变换$\mathscr{A}$的特征根全是0

幂零方阵A的特征根全是0;

$$\left[\begin{array}{l} \text{幂等线性变换}\mathscr{A}\text{的特征根只有1和0} \\ \text{幂等方阵}A(A^2=A)\text{的特征根只有1和0} \end{array}\right];$$

4) 复线性空间上的线性变换$\mathscr{A}$的特征多项式如果无重根, 则$\mathscr{A}$在适当基下的矩阵为对角形

复方阵A的特征多项式如果无重根, 则A一定相似于对角形方阵;

5) 线性变换$\mathscr{A}$的特征多项式是$\mathscr{A}$的零化多项式

方阵A的特征多项式是A的零化多项式;

6) 复线性空间上的线性变换$\mathscr{A}$的若当标准形是对角形
$\Longleftrightarrow$ $\mathscr{A}$的最小多项式无重根
复方阵A的若当标准形是对角形$\Longleftrightarrow$ A的最小多项式无重根;

7) 线性变换$\mathscr{A}$在任一组基下的矩阵都相同$\Longleftrightarrow$ $\mathscr{A}$是数乘变换
方阵A只相似于自身$\Longleftrightarrow$ A是数量方阵$\begin{pmatrix} k & & \\ & \ddots & \\ & & k \end{pmatrix}$;

8) $\mathscr{A}$与任一线性变换（乘积）可交换$\Longleftrightarrow$ $\mathscr{A}$是数乘变换
A与任一方阵（乘积）可交换 $\Longleftrightarrow$ A是数量方阵;

9) 可逆线性变换$\mathscr{A}$的特征根$\lambda \neq 0$, 且$1/\lambda$是$\mathscr{A}^{-1}$的特征根
可逆方阵A的特征根$\lambda \neq 0$, 且$1/\lambda$是A^{-1}的特征根;

10) 线性变换$\mathscr{A}$以0为一个特征根$\Longleftrightarrow$ $\mathscr{A}$的行列式为0

方阵A以0为一个特征根 $\Longleftrightarrow$ A的行列式为0;

11) $\mathscr{A},\mathscr{B}$是n维线性空间的两个线性变换, 则$\mathscr{A}\mathscr{B}$的秩$\geq$ $\mathscr{A}$的秩$+\mathscr{B}$的秩$-n$

A,B是两个n阶方阵, 则$r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$;

12) (实)对称变换的特征根都是实数

实对称方阵的特征根都是实数;

13) 正交变换的实特征根只有±1

正交矩阵的实特征根只有±1;

14) (实)对称变换$\mathscr{A}$在适当标准正交基下的矩阵是对角形方阵

实对称方阵A, 都有正交方阵T, 使TAT^{-1}是对角形方阵.

9. 关于“线性方程组”的“等价叙述”

1) 用线性空间的观点、语言

(1) $$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1m}x_m=b_1 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nm}x_m=b_n \end{cases}$$

即$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}+\cdots+x_m\begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

常数项列向量$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$表成线性方程组系数列向量的线性组合时, 组合系数$x_1,\cdots,x_m$就是解;

2. 若线性方程组有m个未知数，把方程组的每一个解看作L_m中的一个向量，则线性方程组的解集就是L_m中的向量集.

齐次线性方程组的解集，构成L_m一个子线性空间（过原点），齐次线性方程组的基础解系就是解空间的一组基.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + \cdots + k_{m-r(A)} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

非齐次线性方程组的解集，不构成子线性空间（不过原点）或说子线性空间经过了平移，该解集是“一个特解加上导出组的解集”，而导出组是相应的齐次线性方程组 (“非”无基础解系)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star \\ \vdots \\ \star \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + \cdots + k_{m-r(A)} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix};$$

3. 许多关于线性方程组的命题可以用线性空间的语言表述

例：齐次线性方程组(I), (II), 若(I)的系数行向量组能被(II)的行向量组线性表出, 则(II)的解空间是(I)的解空间的子空间.

2) 用矩阵的观点、语言

1. $$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1m}x_m=b_1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nm}x_m=b_n \end{cases}$$

即 $$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

线性方程组的解, 即矩阵方程$AX=b$的解$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

2. 用矩阵形式表述线性方程组的命题
   a) $A^{(m,n)}B^{(n,s)}=O^{(m,s)} \Longleftrightarrow B$的每一列都是齐次线性方程组$AX=O$的解;
   〖 $AB=O \Longrightarrow r(A)+r(B)\le n$. 因解空间维数$=n-r(A)$, $\therefore r(B)\le n-r(A)$ 〗
   b) $A^{(m,n)}X^{(n,1)}=b^{(m,1)}$有唯一解$\Longleftrightarrow A$列满秩, 且$b$为$A$的列向量的线性组合;
   c) $A^{(m,n)}X^{(n,1)}=b^{(m,1)}$对任一$m$维列向量$b$都有解$\Longleftrightarrow A$为行满秩.
3. 利用"线性方程组不同形式语言的相互转化"去证明问题.

例题1: 设A,B,C分别为$m\times n, n\times p, n\times q$矩阵且$r(A)+r(B)=n$, $AB=O, AC=O$.试证: $\exists p\times q$矩阵D使$C=BD$; 且唯一存在上述$D\Longleftrightarrow r(B)=p$.

证: $AB=O$, 表明B的每一列向量都是$AX=O$的解向量.
$r(B)=n-r(A)$,表明B的列向量组的极大线性无关组中向量个数= "$AX=O$的基础解系中向量个数".

故B的列向量组中含有$AX=O$的基础解系, 能生成$AX=O$的全部解向量.

$AC=O$表明C的每一列向量是$AX=O$的解向量, 故都能由B的列向量组线性表出, 例

如$$\begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} \\ \vdots \\ d_{p1} \end{pmatrix},$$

于是

有$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{p1} & \cdots & d_{pq} \end{pmatrix},$$

即$C=BD$.

D唯一$\Longleftrightarrow$ B的列向量组就是$AX=O$的基础解系,

即B的列向量组线性无关, 也即$r(B)=p$.

证完.

例题2: 设A是$m\times n$实矩阵,试证$r(A)=r(AA')$

证: 只需证$AX=0$与$A'AX=0$同解.

$AX=0\Rightarrow A'AX=0$是显然的.

现设$A'AX=0$,则$X'A'AX=0$,即$(AX)'AX=0$.记$AX=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

则$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=0$,即$y_1^2+\cdots+y_n^2=0$.

因在实数范围内讨论,所以$y_1=\cdots=y_n=0$, $AX=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=0$.

故$AX=0$与$A'AX=0$同解.证完.

3) 用正交补的观点、语言

1.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \quad\vdots \\ a_{s1}x_1+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases} \quad \text{(I)} \qquad \begin{cases} b_{11}x_1+\cdots+b_{1n}x_n=0 \\ \quad\vdots \\ b_{t1}x_1+\cdots+b_{tn}x_n=0 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

在欧氏空间$\mathbb{R}^{(n)}$的一组标准正交基下,对$1\le i\le s$

记$\alpha_i=\begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$,记$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,则(I)可写成$\begin{cases} (\alpha_1,X)=0 \\ \quad\vdots \\ (\alpha_s,X)=0 \end{cases}$

(I)的解向量X,就是与$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$都正交的所有向量,即是$\mathscr{L}_1=<\alpha_1,\cdots,\alpha_s>$(生成子空间)的正交补中的所有向量.

因此,齐次线性方程组(I)的解空间即是$\mathscr{L}_1^{\perp}$.

一般地说,齐次线性方程组的解空间,是其系数行向量组生成子空间的正交补.

2. 利用“线性方程组不同形式语言的相互转化”去解决问题

例题1: 已知两齐次线性方程组(I),(II)如上,求齐次线性方程组(III),(IV),使(III)的解空间是(I),(II)两者解空间的交空间,使(IV)的解空间是(I),(II)两者解空间的和空间.

解: 记$\beta_j = \begin{pmatrix} b_{j1} \\ \vdots \\ b_{jn} \end{pmatrix}$,$j = 1, \cdots, t, \mathscr{L}_2 =< \beta_1, \cdots, \beta_t >$,则(II)的解空间为$\mathscr{L}_2^{\perp}$.

可知所求(III)应是$\begin{cases} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{cases}$,因为此时(III)的系数行向量组生成的子空间是$\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2$,而(III)的解空间就是$(\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2)^{\perp} = \mathscr{L}_1^{\perp} \bigcap \mathscr{L}_2^{\perp}$,正是(I),(II)的解空间的交空间.

所求(IV)应是{(I)$\bigcap$(II),即取$\mathscr{L}_1 \bigcap \mathscr{L}_2$的生成组作为(IV)的系数行向量组,于是(IV)的解空间就是$(\mathscr{L}_1 \bigcap \mathscr{L}_2)^{\perp} = \mathscr{L}_1^{\perp} + \mathscr{L}_2^{\perp}$,正是(I),(II)的解空间的和空间.解完.

例题2: 设$\alpha_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})^\top, i=1,\cdots,n,$为$n$维欧氏空间$\mathbb{R}^{(n)}$中的$n$ 个向量,G为$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$的Gram矩阵,$A=(a_{ij})^{(n,n)}$.
试证: 齐次线性方程组$GX=0$与$AX=0$的解空间同构.

证: 只需证这两个解空间的维数相等,因此只需证$r(G)=r(A)$.
据Gram矩阵的定义,$G=((\alpha_i,\alpha_j))^{(n,n)}=AA'$.
而据前面例题2知$r(AA')=r(A)$, 所以$r(G)=r(AA')=r(A)$.证完.

10. 其它的“等价叙述”

1) 两矩阵相抵$\Longleftrightarrow$两矩阵可以通过初等变换互化

两方阵相似$\Longleftrightarrow$同一线性变换在不同基下的方阵表示

两对称方阵相合$\Longleftrightarrow$两二次型可以经过非退化线性替换互化

2) 数字方阵A与B相似$\Longleftrightarrow$特征矩阵$\lambda E - A$与$\lambda E - B$相抵

3) 实对称方阵在正交相似下化为对角形

$\Longleftrightarrow$实二次型在正交线性替换下化为标准形

$\Longleftrightarrow$二次曲面在直角坐标系下的方程经转轴、移轴等坐标变换化为标准方程

结 语

“变中有不变”视角下的高等代数教学

有些(表面上)看来不同的事物,其实是相同的.
有些(表面上)变化的事物中,其实有不变的本质.
有些(表面上)看来毫无联系的事物,其实是有密切联系的.

结 语

"变中有不变"视角下的高等代数教学

有些(表面上)看来不同的事物,其实是相同的.

有些(表面上)变化的事物中,其实有不变的本质.

有些(表面上)看来毫无联系的事物,其实是有密切联系的.

结 语

“变中有不变”视角下的高等代数教学

有些(表面上)看来不同的事物,其实是相同的.

有些(表面上)变化的事物中,其实有不变的本质.

有些(表面上)看来毫无联系的事物,其实是有密切联系的.

结 语

"变中有不变"视角下的高等代数教学

有些(表面上)看来不同的事物,其实是相同的.
有些(表面上)变化的事物中,其实有不变的本质.
有些(表面上)看来毫无联系的事物,其实是有密切联系的.

谢 谢!